FABIANO DIAS CARDOSO

DINÂMICA POPULACIONAL E A TEORIA DO CAOS.

JUATUBA - MG
DEZEMBRO/2025

FABIANO DIAS CARDOSO

Dinâmica Populacional e a Teoria do Caos.

Adaptação do Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à Faculdade de Pará de Minas – FAPAM como requisito para obtenção do grau de Licenciatura em Ciências – Habilitação em Matemática.

JUATUBA – MG
DEZEMBRO/2025

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO..... 5

1. TEORIA DO CAOS.....6

1.1 Sistemas dinâmicos..... 6

1.1.1 Ordem e caos..... 6

2. DINÂMICA POPULACIONAL..... 10

2.1 Os Limites do Crescimento e a Densidade-Dependência.....11

2.2 O Modelo Penna (versão assexuada).....13

2.2.1 Mecânica do Modelo: Representação Computacional.....13

2.2.2 Dinâmica e Reprodução.....14

2.2.3 Análise Matemática e Caos..... 14

CONCLUSÃO.....16

BIBLIOGRAFIA.....17

RESUMO

Analisar a dinâmica de um sistema significa prever seu comportamento futuro com base em uma condição inicial. Um tipo especial de sistema dinâmico é o **dissipativo**, no qual, após um certo tempo, todas as trajetórias convergem para uma região específica no espaço de fase — o "atrator" — independentemente das condições iniciais.

Curiosamente, alguns desses sistemas exibem um comportamento "aleatório" dentro do atrator, mesmo sendo governados por leis totalmente determinísticas. Estes são os **sistemas caóticos**. É importante notar que "caos", neste contexto, não é sinônimo de desordem; refere-se a um sistema determinístico (muitas vezes com uma lei de formação simples) que demonstra extrema sensibilidade às condições iniciais (Efeito Borboleta).

Paralelamente, a **dinâmica populacional**, uma área da biomatemática, estuda a variação de populações. Desde os modelos seminais de Leonardo de Pisa (Fibonacci), a área evoluiu para incorporar maior complexidade biológica, especialmente após a introdução da não-linearidade do mapa logístico por Robert May. Modelos modernos, como o robusto **Modelo Penna**, agora incluem fatores como o envelhecimento e a acumulação de mutações deletérias, fundamentados na teoria evolutiva.

Uma característica persistente na modelagem de dinâmica de populações é a previsão de comportamento caótico. Este trabalho explora a ideia-chave de que o modelo Penna, apesar de sua estrutura estocástica microscópica (mutações aleatórias), apresenta macroscopicamente características comparáveis às de um sistema caótico, situando-se no regime de "***homeocaos***" (caos fraco), um estado de criticalidade fundamental para a adaptabilidade evolutiva.

INTRODUÇÃO

A interseção entre a matemática e a biologia, campo denominado Biomatemática, tem proporcionado, desde os estudos seminais de Leonardo de Pisa (Fibonacci) em 1202, ferramentas analíticas robustas para a compreensão de fenômenos vitais. Historicamente, a modelagem de dinâmicas populacionais evoluiu de abordagens lineares e malthusianas para modelos mais sofisticados, capazes de descrever as limitações ambientais e as flutuações complexas observadas na natureza.

Nesse contexto, a equação logística de Verhulst representou um marco ao introduzir a não-linearidade decorrente da capacidade de suporte do meio. Contudo, foi a transição para o tempo discreto e o advento da capacidade computacional que revelaram a verdadeira riqueza dinâmica desses sistemas. Trabalhos pioneiros de Robert May e Mitchell Feigenbaum demonstraram que equações determinísticas simples podem exibir comportamentos aperiódicos e extrema sensibilidade às condições iniciais, fenômeno este formalizado como Caos Determinístico.

O presente trabalho propõe uma análise da trajetória histórica e conceitual da Teoria do Caos, partindo das intuições geométricas de Henri Poincaré até suas aplicações contemporâneas na dinâmica populacional. O foco central recai sobre o Modelo Penna, uma abordagem baseada em cadeias de bits (*bit-strings*) que simula o envelhecimento biológico e a acumulação de mutações. Investigaremos como este modelo, apesar de sua estrutura estocástica microscópica, manifesta macroscopicamente propriedades de um sistema dinâmico caótico, situando-se no que a literatura denomina "limiar do caos" ou “*homeocaos”*, uma região crítica fundamental para a adaptabilidade evolutiva.

1. TEORIA DO CAOS

1.1 Sistemas dinâmicos

Define-se um sistema dinâmico como qualquer sistema cujo estado evolui ao longo do tempo, seguindo uma regra determinística (Strogatz, 2015, p-2). O objetivo de seu estudo é analisar o comportamento futuro do sistema a partir de uma determinada condição inicial. A modelagem dessas regras depende da natureza do tempo no sistema:

- **Sistemas Contínuos:** Modelados por equações diferenciais, descrevem sistemas onde o tempo flui continuamente.
- **Sistemas Discretos:** Modelados por mapas ou equações de recorrência, descrevem fenômenos que evoluem em passos discretos, como iterações ou gerações anuais (Strogatz, 2015, p-4).

Para a análise qualitativa desses sistemas, utiliza-se o **espaço de fase**, uma construção matemática onde cada eixo representa uma variável essencial do sistema. A evolução temporal é, então, representada por uma trajetória nesse espaço (Strogatz, 2015, p-7).

Muitos sistemas físicos e biológicos são classificados como **dissipativos**. Nesses sistemas, o volume no espaço de fase contrai-se ao longo do tempo. Como consequência, o comportamento de longo prazo torna-se independente das condições iniciais, com todas as trajetórias convergindo para um subconjunto do espaço de fase conhecido como **atrator** (Lorenz, 1963, p-135)[1].

1.1.1 Ordem e caos

A coexistência de determinismo estrito e comportamento aperiódico imprevisível constitui o cerne paradoxal da Teoria do Caos. Embora a terminologia popular possa sugerir desordem absoluta ou ausência de regulação, no contexto rigoroso dos sistemas dinâmicos, o "caos" refere-se a um comportamento estocástico aparente gerado por sistemas determinísticos não-lineares. Tais sistemas, embora regidos por leis de evolução precisas e sem componentes aleatórios — sejam equações diferenciais ou mapas iterados —, exibem uma sensibilidade extrema às condições iniciais. Essa propriedade fundamental impõe um

[1] O termo atrator ainda não era usado quando Lorez publicou sua obra, mas a definição atual coincide com o que ele descreveu.

limite prático à previsibilidade: incertezas infinitesimais no estado inicial do sistema crescem exponencialmente com o tempo, destruindo a capacidade de previsão a longo prazo (Strogatz, 2015, p-15).

Historicamente, essa compreensão representou uma ruptura com o paradigma do "Demônio de Laplace", a visão do século XIX de que, dado o conhecimento preciso das posições e velocidades de todas as partículas do universo, o futuro seria inteiramente determinável. A percepção da falibilidade desse determinismo mecanicista remonta ao final do século XIX. O matemático francês Henri Poincaré, ao estudar a estabilidade do Sistema Solar e o célebre problema dos três corpos, identificou que pequenas variações nas condições iniciais poderiam resultar em grandes divergências nas trajetórias orbitais, impossibilitando uma solução analítica fechada. Poincaré revolucionou a matemática ao propor uma mudança de abordagem: em vez de buscar fórmulas exatas para as posições dos corpos (análise quantitativa), ele desenvolveu a análise qualitativa, criando o conceito de espaço de fase — uma construção geométrica onde cada eixo representa uma variável de estado do sistema e o estado total é um ponto que traça uma órbita ao longo do tempo (Poincaré, 1890).

No entanto, foi apenas com o advento da capacidade computacional que essas propriedades teóricas puderam ser plenamente visualizadas e formalizadas. Em 1963, o meteorologista Edward Lorenz, ao modelar a convecção atmosférica simplificada em um computador, redescobriu acidentalmente a dependência sensível às condições iniciais. Ao tentar repetir uma simulação, Lorenz inseriu os dados iniciais com um arredondamento na sexta casa decimal (0,506 em vez de 0,506127). Para sua surpresa, essa diferença minúscula conduziu o sistema a um estado final completamente divergente do original. Em sua apresentação na *American Association for the Advancement of Science* em 1972, Lorenz popularizou esse fenômeno com o termo "Efeito Borboleta", metaforizando que o bater de asas de uma borboleta no Brasil poderia, através de uma cadeia complexa de eventos não-lineares, desencadear um tornado no Texas (Lorenz, 1963). O sistema de Lorenz tornou-se o exemplo clássico de um sistema dissipativo que evolui para um atrator estranho, uma estrutura fractal no espaço de fase para a qual as trajetórias convergem, mantendo-se confinadas em uma região finita, porém sem nunca se cruzarem ou se repetirem.

A transição da ordem previsível para o caos turbulento pode ser observada classicamente na dinâmica populacional através da equação logística. Introduzida originalmente por Pierre François Verhulst em 1844 em sua forma contínua para refutar o

crescimento malthusiano ilimitado:

$$\frac{dy}{dx} = \alpha y(1 - \frac{y}{\beta}) \ (1.1)$$

Esta equação descreve o crescimento populacional limitado pela capacidade de suporte do meio (β), onde a taxa de crescimento diminui à medida que a população se aproxima desse teto. Contudo, Robert May e Mitchell Feigenbaum demonstraram que a complexidade emerge verdadeiramente na versão discreta desta dinâmica, o mapa logístico, fundamental para descrever espécies com gerações não sobrepostas (como certos insetos) (May, 1976):

$$X_{t+1} = KX_t(1 - X_t) \quad (1.2)$$

Na Equação (1.2), $X_t \in [0, 1]$ representa a densidade populacional normalizada e K é o parâmetro de controle que agrega a taxa de reprodução e as restrições ambientais. O comportamento do sistema varia drasticamente e segue uma rota universal para o caos conforme K aumenta:

- Para $0 < K \leq 3$, a população tende a um ponto fixo estável, representando um equilíbrio ecológico sustentável.
- Para $K > 3$, esse equilíbrio torna-se instável e ocorre a primeira bifurcação de duplicação de período: a população passa a oscilar ciclicamente entre dois valores (um ano de alta densidade seguido por um de baixa), num comportamento estável de período 2.
- À medida que K continua a crescer, novas bifurcações ocorrem cada vez mais rápido, gerando ciclos de período 4, 8, 16, e assim por diante. Esse fenômeno é regido por uma constante universal descoberta por Feigenbaum ($\delta \approx 4,669\#\#$), que dita a taxa de convergência dessas bifurcações.
- Finalmente, ao atingir o ponto de acumulação em $K \approx 3,5699\#\#$, o sistema entra em regime caótico, onde a população flutua de maneira aparentemente aleatória, sem periodicidade discernível, embora permaneça limitada.

A ordem de aparecimento desses ciclos periódicos dentro da janela caótica não é arbitrária, mas obedece rigorosamente ao Teorema de Sharkovskii. Se considerarmos a ordem $\triangleright$ nos números naturais, a sequência de existência dos períodos é dada por:

$$\begin{aligned} & 3 \triangleright 5 \triangleright 7 \triangleright 9 \triangleright \dots \\ & \quad \triangleright 2 \cdot 3 \triangleright 2 \cdot 5 \triangleright 2 \cdot 7 \triangleright \dots \\ & \quad \triangleright 2^2 \cdot 3 \triangleright 2^2 \cdot 5 \triangleright \dots \\ & \quad \vdots \\ & \quad \triangleright 2^n \triangleright 2^{n-1} \triangleright \dots \triangleright 4 \triangleright 2 \triangleright 1 \end{aligned}$$

Este teorema implica um resultado profundo e surpreendente, sumarizado no artigo seminal de Li e Yorke, "*Period Three Implies Chaos*": a existência de um ciclo de período 3 em um sistema dinâmico contínuo unidimensional garante a existência de ciclos de *todos* os outros períodos inteiros, além de regimes caóticos não periódicos. Stewart (1991) refere-se ao parâmetro K metaforicamente como um "botão do caos": ao girá-lo, o sistema transita de um comportamento previsível e estável para a complexidade irredutível.

Para quantificar formalmente o grau de caoticidade e a perda de informação de um sistema, utilizam-se os Expoentes de Lyapunov (λ). Este expoente mede a taxa média exponencial de divergência (ou convergência) entre duas trajetórias que partem de condições iniciais infinitesimalmente próximas.

- Se $\lambda < 0$: As perturbações são amortecidas e as trajetórias convergem para um ponto ou ciclo limite; o sistema é estável e previsível.
- Se $\lambda > 0$: As trajetórias divergem exponencialmente, indicando sensibilidade às condições iniciais e caos. O inverso do expoente de Lyapunov ($1/\lambda$) define o "horizonte de previsibilidade" — o tempo máximo além do qual qualquer previsão torna-se impossível.

É crucial notar que, mesmo em regime caótico ($\lambda > 0$), o sistema não explode para o infinito; ele permanece confinado dentro de uma região limitada do espaço de fase. A estrutura geométrica resultante desse confinamento de trajetórias infinitas em um volume finito é chamada de Atrator Estranho. Um exemplo bidimensional célebre é o Atrator de Hénon, que exibe uma estrutura fractal complexa: se ampliarmos qualquer parte do atrator, encontraremos cópias repetidas da estrutura original em escalas cada vez menores (Figura 1).



Fig 1: Atrator de Hénon

Portanto, o caos determinístico ocupa uma região fronteiriça fascinante entre a regularidade monótona e a aleatoriedade pura. Estudos contemporâneos em biomatemática e sistemas complexos sugerem que muitos sistemas biológicos evoluíram para operar no chamado "limiar do caos" ou criticalidade auto-organizada. Nesta região, onde o expoente de Lyapunov é positivo porém próximo de zero, o sistema atinge um equilíbrio ótimo: ele mantém estabilidade suficiente para preservar a vida e a memória genética, mas possui instabilidade (variabilidade) suficiente para permitir a adaptação rápida a ambientes em mudança e a evolução das espécies (Viana, 2011).

2. DINÂMICA POPULACIONAL

A Dinâmica Populacional constitui um ramo fundamental da Biomatemática e da Ecologia Teórica, dedicando-se à investigação quantitativa das variações no tamanho e na composição etária das populações biológicas ao longo do tempo. O objetivo central desta disciplina é desenvolver modelos matemáticos capazes de descrever, explicar e prever o comportamento de sistemas biológicos, permitindo a compreensão dos mecanismos reguladores subjacentes, como taxas de natalidade, mortalidade e migração (BASSANEZI, 2002).

Historicamente, a tentativa de quantificar o crescimento populacional remonta à Idade

Média. Um dos registros seminais na modelagem matemática ocidental é atribuído a Leonardo de Pisa, conhecido como Fibonacci, que em sua obra *Liber Abaci* (1202) propôs um problema teórico sobre a reprodução de coelhos. O modelo de Fibonacci, embora desprovido de realismo biológico estrito — ao desconsiderar a mortalidade e a capacidade de suporte do meio —, introduziu a noção de crescimento baseado em recorrência discreta.

No modelo de Fibonacci, assume-se que um par de coelhos atinge a maturidade sexual em uma unidade de tempo (mês ou estação) e, a partir desse momento, gera um novo par a cada período subsequente. Sendo M_n o número de pares maduros e I_n o número de pares imaturos no tempo n, a dinâmica é regida pelo sistema linear de diferenças:

$$\begin{cases} I_{n+1} = M_n \\ M_{n+1} = M_n + I_n \end{cases}$$

A combinação destas relações resulta na célebre Sequência de Fibonacci, onde a população total P_n segue a relação de recorrência de segunda ordem $P_{n+2} = P_{n+1} + P_n$. O comportamento assintótico deste modelo revela um crescimento exponencial, onde a razão entre populações sucessivas converge para a Razão Áurea ($\phi \approx 1,618$). Contudo, a ausência de fatores limitantes torna este modelo inadequado para descrever populações reais em longos intervalos de tempo, visto que o crescimento indefinido viola as restrições físicas e biológicas do ambiente (EDELSTEIN-KESHET, 2005).

2.1 Os Limites do Crescimento e a Densidade-Dependência

O crescimento exponencial, característico do modelo de Fibonacci e, posteriormente, formalizado na teoria malthusiana, pressupõe recursos ilimitados. Entretanto, em ecossistemas reais, o crescimento populacional é invariavelmente restringido pela disponibilidade de recursos (alimento, espaço, abrigo), competição intraespecífica e predação. A introdução do conceito de **Capacidade de Suporte** (K) marca a transição dos modelos lineares para os modelos não-lineares, onde a taxa de crescimento torna-se dependente da densidade populacional (BASSANEZI, 2002).

Pierre-François Verhulst, no século XIX, refinou a visão malthusiana ao propor a Equação Logística, introduzindo um termo de atrito que desacelera o crescimento conforme a população se aproxima de K. Embora Verhulst tenha trabalhado inicialmente com modelos

contínuos, a observação de fenômenos naturais sugere que muitas espécies possuem ciclos reprodutivos discretos (gerações não sobrepostas), o que justifica o estudo de mapas discretos.

A validação empírica das limitações de crescimento e das oscilações populacionais foi notavelmente demonstrada nos experimentos clássicos de A. J. Nicholson com a mosca varejeira (*Lucilia cuprina*) na década de 1950. Nicholson confinou populações em ambientes controlados com suprimento alimentar constante. Observou-se que a população não estabilizava monotonicamente no limite do suporte; ao contrário, exibia flutuações violentas e quase periódicas (NICHOLSON, 1957).

Essas oscilações ocorrem devido ao atraso na resposta temporal (*time delay*) entre o consumo de recursos e o efeito na reprodução. Quando a população é pequena, há superabundância de alimento, levando a uma explosão demográfica que ultrapassa a capacidade de suporte (*overshoot*). Consequentemente, a escassez abrupta de recursos provoca uma mortalidade em massa (*crash*), reiniciando o ciclo.

Para modelar matematicamente este fenômeno em sistemas discretos, é conveniente normalizar a variável populacional. Em vez de trabalhar com o número absoluto de indivíduos N_t, utiliza-se a densidade relativa $x_t = N_t/K$, onde $x_t \in [0, 1]$. Desta forma, o termo $(1 - x_t)$ representa a fração de recursos disponíveis.

Além da competição intraespecífica, as interações interespecíficas, como a predação, também geram oscilações, conforme descrito pioneiramente por Vito Volterra e Alfred Lotka. O modelo presa-predador demonstra que a dinâmica de uma espécie é intrinsecamente acoplada à outra: o aumento das presas favorece os predadores, cujo crescimento subsequente reduz a população de presas, gerando ciclos de fase defasados.

Contudo, a grande descoberta da biomatemática moderna, consolidada por Robert May (1976), foi a constatação de que modelos determinísticos simples de densidade-dependência, sem a necessidade de fatores estocásticos externos, são capazes de gerar comportamentos extremamente complexos. À medida que a taxa de crescimento intrínseco aumenta, o sistema pode transitar de um ponto de equilíbrio estável para ciclos de bifurcação e, finalmente, para o **caos determinístico**. Esse comportamento sugere que a irregularidade observada na natureza (como nos experimentos de Nicholson) pode não ser fruto de ruído ambiental aleatório, mas sim uma propriedade intrínseca da dinâmica não-linear

do sistema.

2.2 O Modelo Penna (versão assexuada)

A modelagem de populações estruturadas por idade ganhou uma nova perspectiva com a introdução do Modelo Penna, proposto originalmente pelo físico brasileiro T. J. P. Penna em 1995. Este modelo destaca-se por incorporar explicitamente o fenômeno do envelhecimento biológico (senescência) e o acúmulo de mutações deletérias, fundamentando-se na Teoria Evolutiva do Envelhecimento. Segundo esta teoria, a força da seleção natural decai com a idade, permitindo que genes com efeitos deletérios tardios se acumulem no "pool" genético da população (MEDAWAR, 1952).

Empiricamente, o modelo reproduz a Lei de Gompertz, que estabelece que a taxa de mortalidade aumenta exponencialmente com a idade em organismos adultos:

$$q(x) = q_0 e^{cx}$$

Onde $q(x)$ é a taxa de mortalidade na idade x, e q_0 e c são parâmetros positivos.

2.2.1 Mecânica do Modelo: Representação Computacional

O Modelo Penna utiliza uma abordagem computacional baseada em cadeias de bits (*bit-strings*) para representar o genoma dos indivíduos. Cada indivíduo é caracterizado por um vetor binário de comprimento L, que corresponde ao limite genético máximo de vida (idade máxima possível). Cada posição do vetor (locus) representa um intervalo de tempo discreto (um "ano").

A leitura do genoma ocorre sequencialmente:

- Um bit **0** na posição i indica saúde ou ausência de doença naquela idade.
- Um bit **1** na posição i indica a manifestação de uma mutação deletéria ou doença genética hereditária na idade i.

O acúmulo de mutações é o fator determinante para a morte genética. Define-se um limiar T (threshold); se um indivíduo acumular um número de mutações ativas (bits 1) igual ou superior a T até sua idade atual, ele morre. Adicionalmente, o modelo impõe uma restrição ambiental logística, o **Fator de Verhulst** (V_t), que limita o crescimento populacional

baseado na capacidade de suporte N_{max}:

$$V_t = 1 - \frac{N_t}{N_{max}}$$

Onde N_t é a população total no tempo t. O termo V_t representa a probabilidade de sobrevivência à competição por recursos (espaço e alimento).

2.2.2 Dinâmica e Reprodução

O ciclo de vida no modelo assexuado segue as seguintes etapas a cada passo de tempo:

1. **Verificação de Sobrevivência (Verhulst):** Cada indivíduo sobrevive à restrição ambiental com probabilidade V_t.
2. **Verificação Genética:** O indivíduo morre se o número de mutações acumuladas até sua idade atual for $\geq T$.
3. **Reprodução:** Indivíduos com idade igual ou superior à idade reprodutiva R geram B descendentes.
4. **Mutação:** Os descendentes herdam o genoma do pai, mas sofrem M mutações aleatórias (bits 0 tornam-se 1) inseridas em posições aleatórias.

2.2.3 Análise Matemática e Caos

Embora o Modelo Penna seja fundamentalmente computacional, é possível derivar uma aproximação analítica de campo médio (*mean-field approximation*) para estudar seu comportamento dinâmico global, conforme desenvolvido por Silva (2001).

Consideremos as seguintes frações da população no tempo t:

- N_t^T: Número de mortes devido ao limiar genético T.
- N_t^V: Número de mortes devido ao limite de idade (velhice, fim da bit-string).
- α_t^R: Fração da população apta a se reproduzir (idade $\geq R$).

A população no tempo $t+1$ é composta pelos sobreviventes do tempo t mais os novos nascimentos. A equação de balanço assume a forma:

$$N_{t+1} = \left[V_t N_t - N_t^T - N_t^V\right](1 + \alpha_t^R B)$$

Substituindo o termo de Verhulst ($V_t = 1 - N_t/N_{max}$) e reescrevendo em termos da densidade populacional relativa $X_t = N_t/N_{max}$, obtemos:

$$X_{t+1} = \left[X_t\,(1 - X_t) - \frac{N_t^T}{N_{max}} - \frac{N_t^V}{N_{max}}\right](1 + \alpha_t^R B)$$

Assumindo que as mortes genéticas e por velhice podem ser expressas como proporções da população total ($N_t^T \approx \alpha_t^T N_t \$e\$ N_t^V \approx \alpha_t^V N_t$), simplificamos a expressão para:

$$X_{t+1} = (1 + \alpha_t^R B) X_t \left(1 - \alpha_t^T - \alpha_t^V - X_t\right)$$

Definindo os parâmetros auxiliares dependentes do tempo $K_t = 1 + \alpha_t^R B$ (taxa de crescimento efetiva) e $B_t = 1 - \alpha_t^T - \alpha_t^V$ (capacidade de sobrevivência intrínseca), chegamos a uma forma análoga ao Mapa Logístico Generalizado:

$$X_{t+1} = K_t X_t (B_t - X_t)$$

A equação acima demonstra que a dinâmica do Modelo Penna, apesar de sua complexidade estocástica microscópica (mutações aleatórias), exibe macroscopicamente uma estrutura não-linear quadrática similar ao mapeamento logístico de Feigenbaum (Equação 1.2).

Esta semelhança estrutural sugere que o Modelo Penna pode transitar para regimes caóticos sob certas condições de parâmetros (altas taxas de natalidade B e mutação M). Estudos indicam que populações biológicas tendem a evoluir para a fronteira do caos (criticalidade auto-organizada), onde o sistema mantém flexibilidade adaptativa (SILVA, 2001). A presença de expoentes de Lyapunov positivos, porém próximos de zero, em simulações do modelo Penna confirma a existência de um "caos fraco" ou “*homeocaos”*, essencial para a estabilidade evolutiva a longo prazo

CONCLUSÃO

A investigação da dinâmica populacional sob a ótica dos sistemas dinâmicos revela que a complexidade observada na natureza não é, necessariamente, fruto de aleatoriedade extrínseca, mas sim uma propriedade intrínseca das equações não-lineares que regem esses sistemas. A jornada desde os modelos de recorrência de Fibonacci até as simulações computacionais modernas evidencia que o determinismo matemático pode coexistir com a imprevisibilidade temporal, conceito central da Teoria do Caos.

Conclui-se que os sistemas dissipativos, ao evoluírem para atratores estranhos no espaço de fase, oferecem uma explicação elegante para as flutuações populacionais irregulares. O Modelo Penna, objeto central desta análise, corrobora essa perspectiva ao integrar a teoria evolutiva do envelhecimento com a mecânica estatística. As simulações demonstram que, embora o modelo incorpore mutações aleatórias, sua dinâmica global apresenta Expoentes de Lyapunov positivos e próximos de zero. Este comportamento caracteriza o estado de "homeocaos" ou caos fraco, sugerindo que as populações biológicas evoluem para operar em uma região de criticalidade que maximiza a estabilidade fenotípica sem sacrificar a plasticidade necessária para a adaptação.

Por fim, embora a detecção empírica inequívoca de caos em séries temporais ecológicas permaneça um desafio devido ao ruído ambiental, os experimentos in silico consolidam a Teoria do Caos como um arcabouço teórico indispensável. Eles permitem compreender que o comportamento aparentemente errático das populações obedece a uma ordem subjacente determinística, refinando nossa capacidade de descrever e, dentro de certos horizontes, prever o destino dos sistemas biológicos.

BIBLIOGRAFIA

BASSANEZI, R. C. *Ensino-aprendizagem com modelagem matemática*. São Paulo: Contexto, 2002.

EDELSTEIN-KESHET, L. *Mathematical Models in Biology*. Philadelphia: SIAM, 2005.

LORENZ, E. N. Deterministic Nonperiodic Flow. *Journal of the Atmospheric Sciences*, Boston, v. 20, n. 2, p. 130-141, 1963.

MAY, R. M. Simple mathematical models with very complicated dynamics. *Nature*, Londres, v. 261, p. 459-467, 1976.

MEDAWAR, P. B. *An Unsolved Problem of Biology*. London: H. K. Lewis, 1952.

NICHOLSON, A. J. The Self-Adjustment of Populations to Change. *Cold Spring Harbor Symposia on Quantitative Biology*, v. 22, p. 153-173, 1957.

PENNA, T. J. P. A bit-string model for biological aging. *Journal of Statistical Physics*, v. 78, n. 5-6, p. 1629-1633, 1995.

POINCARÉ, H. Sur le problème des trois corps et les équations de la dynamique. *Acta Mathematica*, Estocolmo, v. 13, p. 1-270, 1890.

SILVA, A. V. C. C. *Estudos sobre complexidade em dinâmica populacional e embriogênese*. 2001. Dissertação (Mestrado em Física) – Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, 2001.

STEWART, I. *Os números da natureza*: a realidade irreal da imaginação matemática. Rio de Janeiro: Rocco, 1996.

STEWART, I. *Será que Deus joga dados?* A nova matemática do caos. Rio de Janeiro: Jorge Zahar Editor, 1991.

STROGATZ, S. H. *Nonlinear Dynamics and Chaos*: With Applications to Physics, Biology, Chemistry, and Engineering. 2. ed. Boca Raton: CRC Press, 2015.